Laboratoire de Mathématiques

UMR 5127 - CNRS et Université de Savoie

D. Bresch
Directeur de Recherche CNRS
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie
73376 Le Bourget-du-Lac Cedex
France

didier.bresch@univ-savoie.fr

28 août 2007

À qui de droit

Objet : Rapport sur le document de thèse de Florent CHAZEL

Le document de thèse rédigé par Florent CHAZEL est consacré au problème d'Euler à surface libre sur domaine à fond non plat en une ou deux dimensions d'espace pour la surface. L'objectif principal étant de proposé de nouveaux modèles d'écoulements littoraux permettant de rendre compte de l'influence de la topographie des fonds marins sur les ondes de surface.

Son mémoire est constitué de trois parties : une partie modélisation consacrée, dans le cadre du régime d'ondes longues de faible amplitude, à l'obtention de nouveaux modèles prenant en compte les variations topographiques. La second partie concerne la justification mathématique des modèles construits, via la preuve de leur caractère bien posé et de la démonstration rigoureuse de l'approximation qu'ils fournissent. La dernière partie concerne la simulation des modèles précécedents afin de procéder à leur évaluation et à leur comparaison.

Dans une première partie, Florent CHAZEL obtient de nouveaux modèles de type Boussinesq pour deux échelles topographiques distinctes, celles de faibles variations et celles de variations fortes. Pour ce faire il adapte la méthodologie employée dans le cas à fond plat dans [J. BONA, T. COLIN, D. LANNES, ARMA 176, (2005), 373-410] et [D. LANNES, J. Amer. Math. Soc 18 (2005), 605–654]. Cette partie fait l'objet d'un article à paraître dans *M2AN*. Il s'agit là d'obtenir, dans un premier temps, une justification rigoureuse d'une méthode générale de construction du développement asymptotique de l'opérateur Dirichlet-Neuman associé à un problème aux limites elliptique. L'auteur emploie alors ensuite un changement de variable qui permets d'exprimer les équations en fonction de la vitesse horizontale de fluide à n'importe quelle hauteur afin d'introduire deux paramètres supplémentaires gérant la structure des termes dispersifs du système. Enfin, il propose un second changement de variable non linéaire visant à symétriser la partie non linéaire du système. Au final, Florent CHAZEL obtient toute une classe de modèles de type Boussinseq dépendant de trois paramètres arbitraires. De cette classe a été extraite une sous classe non vide de modèles complétement symétriques et bien posés permettant de construire, à partir de la solution de n'importe lequel de ces systèmes, une approximation des solutions du problèmes d'Euler surface libre par inversion successive des deux changements de variable. Cette approximation est justifiée en temps long.

Dans le cas de fortes variations de la bathymétrie, la stratégie a dû être fortement modifiée afin de prendre en compte l'influence accrue des termes de topographie. Les changements de variable ont été reformulés et leur ordre a été inversé commencant par le changement de variable non linéaire. Il s'agit donc là de la portion la plus originale de cette partie car il faut symétriser les termes d'ordre un en plus des termes non linéaires afin de pouvoir obtenir des approximations au premier ordre adéquates à la symétrisation des termes dispersifs. Comme dans le cas précédent, Florent CHAZEL a pu obtenir une sous classe de modèles totalement symétriques permettant de construire des solutions approchées du modèle initial. Cette approximation a été justifiée en temps court dans le cas général et en temps long pour des bathymétries lentement variables. Pour preuve de l'intérêt du sujet étudié, notons que son travail a donné lieu récemment, à certaines extensions par des auteurs internationalement reconnus tels que A. DE BOUARD, W. CRAIG, P. GUYENNE et C. SULEM qui considèrent une régularité de fond plus faible.

La deuxième partie concerne l'approximation classique de KdV (Korteweg de Vries) dans le cadre de fond non plat à faibles variations topographiques. Dans un premier temps, l'auteur montre comment retrouver cette approximation à partir de n'importe quel système de Boussinesq symétrique construit dans la partie précédente. Cette méthode passe par la recherche de solutions approchées du système diagonalisé sous la forme de deux ondes unidirectionnelle se propageant en sens opposés plus des termes correcteurs vérifiant une conditions classique de croissance sous linéaire. L'approximation a ainsi été retrouvée et justifiée dans le cadre d'une bathymétrie décroissant à l'infini à une vitesse spécifique, permettant ainsi de retrouver les résultats de T. IGUCHI à fond non plat. L'approximation n'est, par contre, plus valide pour une bathymétrie plus générale : par exemple une marche ou une sinusoide comme le montre l'auteur du mémoire. Florent CHAZEL propose alors un modèle approché modifié qui inclue les termes topographiques à croissance potentiellement linéaire et qui est alors justifié dans le cadre de bathymétries très générales. La méthodologie consiste à corriger l'ordre principale du développement. L'avantage de ce modèle est que les correcteurs se calculent explicitement en fonction de KdV classique et donc ne nécessite pas un temps de calcul supplémentaire pour résoudre une autre équation aux dérivées partielles comme cela était le cas dans [T. Colin, D. Lannes, DCDS (2004), 83–100] pour une justification onde longue de systèmes de type DAVEY-STEWARSON. Une extension au cas périodique a également été proposée et sa validité en temps long justifiée.

La dernière partie, en collaboration avec F. MARCHE et D. LANNES, concerne la simulation numérique en 1-D de surface des modèles précédents. Dans un premier temps, ils comparent le modèle de Boussinesq symétrique pour faible variations topographiques, l'approximation de KdV classique, et le modèle KdV modifié proposé dans la partie précédente. Après validation des méthodes numériques employées (Schéma de type Crank-Nikolson et méthode de relaxation dûe à C. BESSE et C.-H. BRUNEAU), divers tests pour différentes valeurs de paramètres sont réalisés. On remarque que le modèle KdV avec terme rajouté diverge sur un temps en $1/\varepsilon^{3/2}$ au contraire de Boussinesq qui reste valable. Dans un second temps, les auteurs procèdent à la simulation numérique du modèle de GREEN NAGHDI qui présente l'avantage d'être valide dans le cadre plus générale du régime Shallow Water. Le modèle de GREEN NAGHDI présente l'avantage de pouvoir retrouver tous les modèles précédents pour des valeurs de paramètres particuliers. Ce modèle présente un parfait raidissement des ondes progressives sur pente douce. Par ces simulations, Florent CHAZEL montre que le domaine de validité du modèle de Boussinesq est plus large en les paramètres μ et ε qu'en ε. Il obtient de bon résultats dans le cadre général de shallow water mais pour de faibles variations topographiques.

En conclusion, ce mémoire de thèse balaye de manière très complète et détaillée tout le spectre que l'on peut attendre d'un travail en Mathématiques Appliquées : mise en place de nouveaux modèles permettant une meilleure prise en compte de l'effet de topographie, adaptation parfaite de méthodologies existantes pour une justification mathématique rigoureuse, comparaison de domaines de validité entre différents modèles par simulation numérique. Le rapporteur a particulièrement apprécié la qualité de la rédaction et la clareté des propos de l'auteur qui n'a pas hésité à présenter qualités et inconvénients des modèles qu'il propose. Pour mener à bien ce travail, Florent CHAZEL a acquis en profondeur bons nombres d'outils mathématiques (opérateurs de type Dirichlet-Neumann, analyse asymptotique, systèmes hyperboliques, symétrisations, méthodes WKB, correcteurs) et d'outils numériques (Cranck Nikolson, méthodes de relaxation). Il ne fait donc aucun doute que le mémoire de thèse peut être présenté tel quel en vue de l'obtention du Doctorat en Mathématiques Appliquées de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux.

UNIVERSITÉ DE SAVOIE-CNRS
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES
LAMA - UMR 5127
CAMPUS SCIENTIFIQUE
73376 LE BOURGET - DU - LAC CEDEX

Didier BRESCH