Laboratoire de Mathématique - UMR 8628
Université Paris-Sud
Centre Scientifique d'Orsay

Sault

Orsay, 2 septembre 2007

Rapport sur la thèse de Florent Chazel

Le mémoire présenté par Florent Chazel concerne la dérivation rigoureuse et la simulation numérique de modèles d'ondes hydrodynamiques (water waves) longues et de faible amplitude en présence d'une bathymétrie non triviale (fond non plat). Ce type de modèles est particulièrement important dans les applications océanographiques (étude d'écoulements littoraux par exemple).

On sait depuis Zakharov que le système complet des water waves (Euler avec frontière libre) se réduit à un système de deux équations posées dans un domaine fixe ($\mathbf{R}^d$, d = 1, 2) pour l'élévation et la vitesse horizontale. Le prix à payer est l'apparition d'un opérateur non local (opérateur de Dirichlet-Neumann) qui dépend de façon très non linéaire de la surface libre.

Dans une première partie, F. Chazel s'intéresse au régime de Boussinesq (les petits paramètres mesurant la non-linéarité et la dispersion sont du même ordre, ε). Un paramètre β quantifie par ailleurs les variations bathymétriques.
Comme dans le cas des fonds plats, les modèles s'obtiennent par un développement asymptotique de l'opérateur de Dirichlet-Neumann par rapport à ε au moyen d'une méthode BKW mais c'est ici beaucoup plus délicat.

Université Paris-Sud - Bâtiment 425 - 91405 Orsay Cedex
☎ 33 (0)1 69 15 . . . . - Fax : 33 (0)1 69 15 . . . .
Internet : http://www.math.u-psud.fr

Florent Chazel distingue deux cas. Le cas $\varepsilon = \beta$ correspond à de petites variations de la topographie du fond et généralise les résultats de Bona- Chen Saut et Bona-Colin-Lannes au cas des fonds non plats. Florent Chazel obtient ici des classes de systèmes de Boussinesq symétriques à coefficients non constants et il montre qu'ils fournissent tous une approximation du système d'Euler en grand temps, avec l'estimation d'erreur optimale.
Les dificultés sont d'ordre technique mais non triviales!

Le deuxième cas, $\beta = O(1)$, correspond à de grandes variations du fond et il est beaucoup plus délicat. En effet l'influence de la bathymétrie se fait sentir dès les termes O(1) dans le premier système de Boussinesq que l'on obtient. Florent Chazel doit alors modifier l'approche des travaux précités. Plus précisément il doit d'abord effectuer un changement non linéaire symétrisant à la fois les termes non linéaires (d'ordre ε) mais aussi les termes d'ordre O(1). Il obtient alors une nouvelle classe de systèmes à 4 paramètres (qui peuvent être choisis pour que le système soit complètement symétrique) et il montre qu'ils fournissent une bonne approximation du système d'Euler en temps court. Cette partie est très novatrice.

Dans une deuxième partie, Florent Chazel fait une étude très complète de la validité de l'approximation par un système découplé de deux équations de Korteweg-de Vries (KdV) en fond non plat. Il étend ainsi notablement des résultats de Iguchi (obtenus pour un type particulier de bathymétries). Un des beaux résultats obtenus par F. Chazel montre que l'approximation de KdV est valable en temps long pour une classe de bathymétries comprenant le cas d'une marche et le cas d'un fond sinusoïdal lentement variable.

Une troisième partie est consacrée à la comparaison numérique de trois modèles dans le cas uni-dimensionnel, le modèle de Boussinesq symétrique obtenu dans le cas $\varepsilon = \beta$, le système de KdV classique et le système de KdV modifié par la bathymétrie non triviale, dans le cas d'un fond présentant une marche et dans le cas d'un fond sinusoïdal lentement variable. Les simulations numériques (par un schéma de type Crank-Nicolson combiné avec la méthode de relaxation de Besse-Bruneau) montrent clairement l'avantage des modèles prenant en compte la bathymétrie sur l'approximation habituelle de KdV (indépendante du fond).

Enfin dans une derrnière partie, F. Chazel développe des simulations numériques pour les équations de Green-Naghdi en une dimension avec fond non plat. Rappelons que le modèle de Green-Naghdi est un modèle du type "shallow-water", *ie* seul le paramètre de dispersion est supposé petit. Les schémas sont encore du type Crank-Nicolson combinés à une variante de la méthode de Besse-Bruneau. Ils préservent “presque” une énergie naturelle, pour des valeurs modérées de ε, ce qui assure une certaine stabilité du schéma pour ces valeurs. Florent Chazel compare alors le système de Green-Naghdi avec le système de Boussinesq symétrique avec fond variable, dans le cas d'une marche et dans le cas d'un fond à pente douce, mettant en évidence l'avantage du système de Green-Naghdi quand les effets bathymétriques sont importants (par exemple au fur et à mesure que la hauteur d'eau diminue dans le deuxième cas).

En conclusion, le mémoire présenté par Florent Chazel est un travail exemplaire de mathématiques appliquées: il dérive et justifie rigoureusement, en utilisant des techniques délicates d'analyse asymptotique, des modèles réalistes de water waves dans des régimes physiquement pertinents. Il comprend en outre des simulations numériques conduites avec rigueur qui montrent clairement les avantages et les limitations des modèles. Le travail de F. Chazel est une contribution marquante à l'étude rigoureuse des ondes hydrodynamiques de surface avec fond non plat et il fera date. Il s'agit d'une excellente thèse dont je recommande bien sûr la soutenance.

Jean-Claude Saut